

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ภาคเรียน Summer/2566

หน่วยการเรียนรู้ที่ 10
กราฟความสัมพันธ์เชิงเส้น

สอนโดย พิชญุตม์ ราชเดิม (PunPitchy)
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
Best Friend Forever School

10.1 จำนวนเต็มเบื้องต้น

จำนวนเต็ม คือ จำนวนทางคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่ง
ที่มีได้ไม่จำกัดไม่อยู่ในรูปของทศนิยม และแบ่งเป็น
3 ประเภท บนเส้นจำนวน ได้แก่

1.จำนวนเต็มบวก อยู่ทางฝั่งขวาของเส้นจำนวน
2.จำนวนเต็มลบ อยู่ทางฝั่งซ้ายของเส้นจำนวน
3.จำนวนเต็มศูนย์ อยู่ตรงกลางของเส้นจำนวนโดยสมบูรณ์
คั่นกลางระหว่างจำนวนเต็มลบและจำนวนเต็มบวก

สรุปได้ว่า จำนวนเต็มที่มากที่สุดคือจำนวนเต็มบวก
น้อยที่สุดคือจำนวนเต็มลบ ซึ่งจำนวนเต็มลบจะตรงกันข้าม
กับจำนวนเต็มบวก นั่นคือจำนวนเต็มลบยิ่งลมีค่ามาก
จำนวนนั้นจะมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ

ทดสอบความเข้าใจ !!!
จงเปรียบเทียบจำนวนเต็มดังต่อไปนี้

1)23....45
2)-11....9
3)-5....-11
4)-9...12

10.2 คู่อันดับและกราฟ

คู่อันดับ หมายถึง การเขียนสัญลักษณ์แสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของกลุ่มสองกลุ่มที่มีความสัมพันธ์กัน เช่น
การจับคู่ระหว่าง a และ b เขียนแทนด้วย (a,b)
ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองชุดที่มีกราฟเป็นจุดเรียงอยู่ในเส้นตรงเดียวกันหรือเป็นกราฟเส้นตรง เรียกว่า ความสัมพันธ์เชิงเส้น

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนดินสอและราคาดินสอ โดยเขียนเป็นคู่อันดับ

จำนวนดินสอ	1	2	3	4	5	6
ราคาดินสอ	5	10	15	20	25	30

การเท่ากันของคู่อันดับ มีบทนิยามว่า
ถ้า (a,b) = (c,d) ก็ต่อเมื่อ a=cและ b=d
และ (a,b) ≠ (b,a) นั่นคือคู่อันดับเขียนสลับกันไม่ได้
แต่ (a,b)=(b,a) ก็ต่อเมื่อ a=b

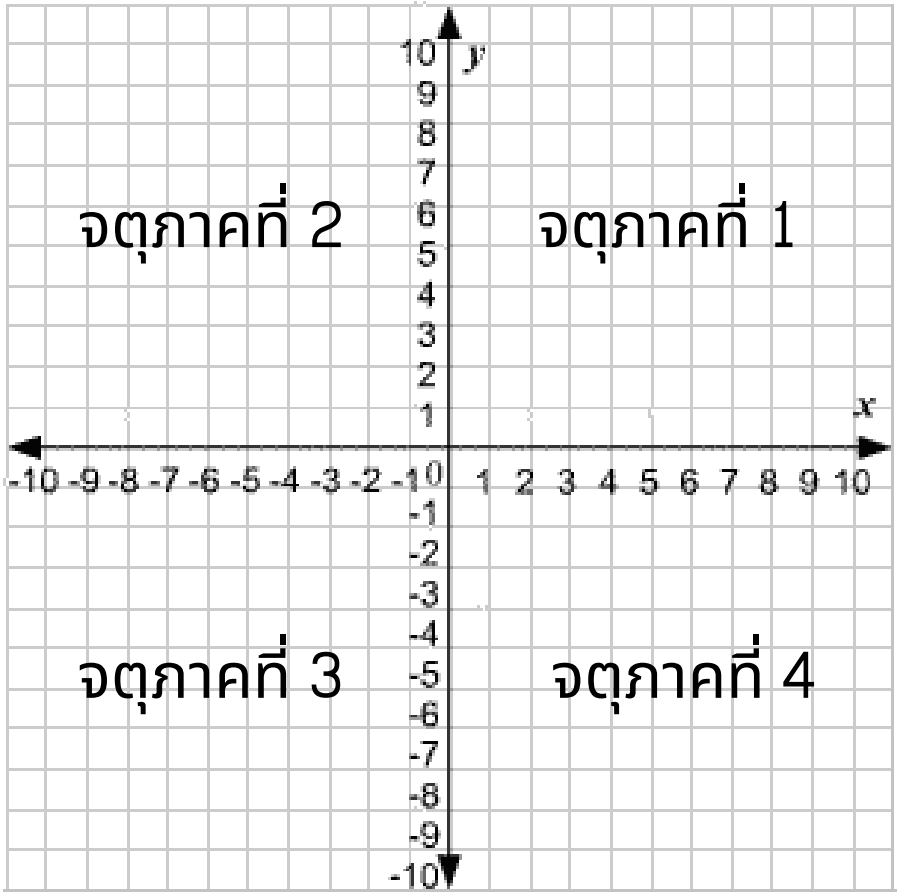
พิจารณาคู่อันดับดังต่อไปนี้ แล้วแก้สมการหา x,y

$$(3x+1, 19) = (13, 2y-1)$$

$$(6x, 7y) = (48, 63)$$

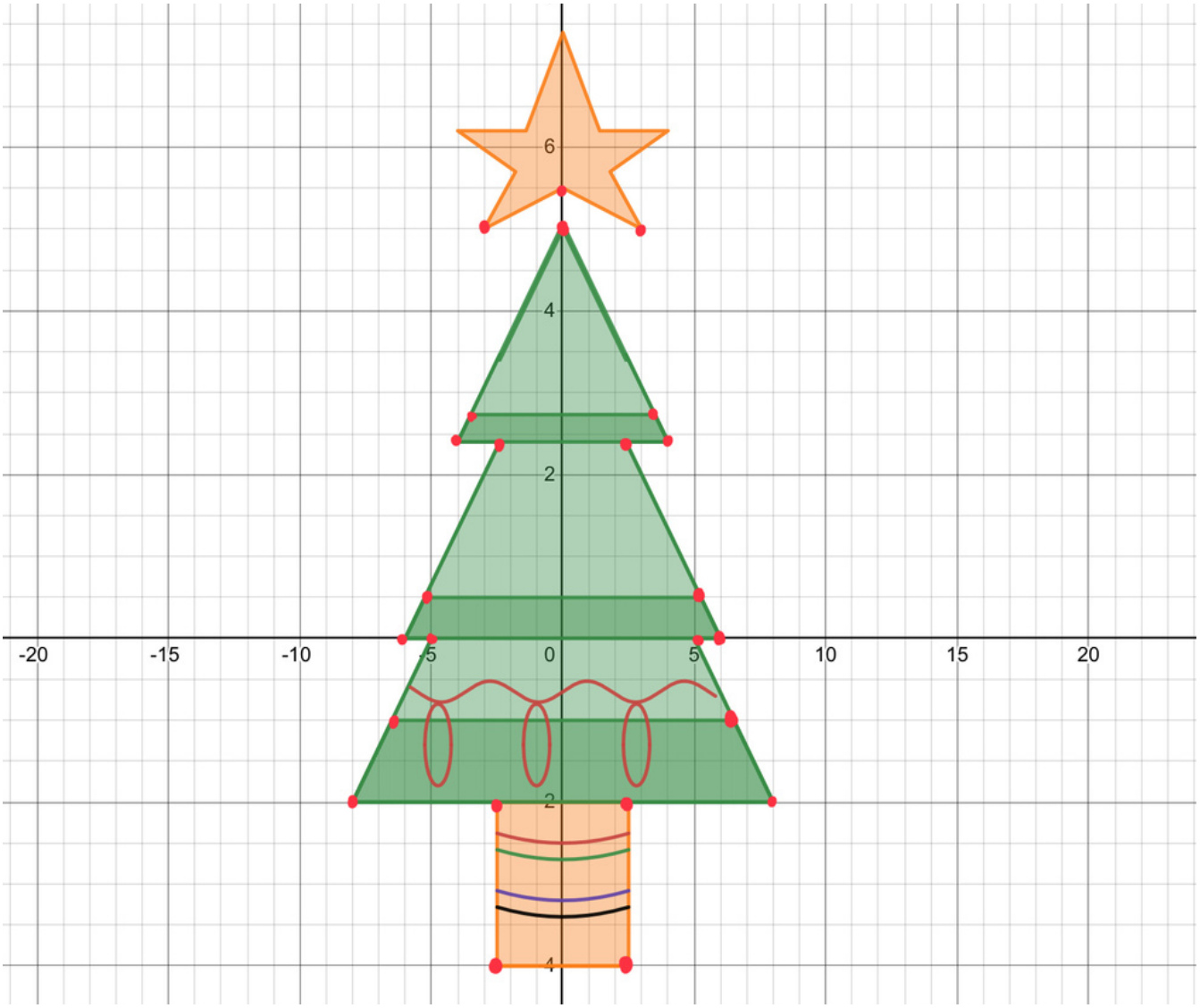
$$(x, 8) = (4, x+y)$$

กราฟของคู่อันดับ คือ กราฟที่แสดงความสัมพันธ์ของคู่อันดับ เกิดจากการเขียนเส้นจำนวนในอนวนอนและตั้งให้ตัดกัน ที่จุดกำเนิด (0,0) เป็นมุมฉาก เกิดเป็น 4 ช่องของกราฟดังรูป



เส้นจำนวนในแกนตั้ง คือ แกน x
เส้นจำนวนในแกนนอน คือ แกน y
กราฟของคู่อันดับจะแทนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลแกน x และแกน y ดังนั้นคู่อันดับ (a,b) ที่มี a เป็นสมาชิกตัวแรกและ b เป็นสมาชิกตัวที่สอง สามารถเขียนแทนเป็น (x,y) ได้

พิจารณาจุดสีแดงบนกราฟรูปต้นคริสต์มาสนี้ แล้วเขียนคู่อันดับแทนแต่ละจุดที่กำหนด



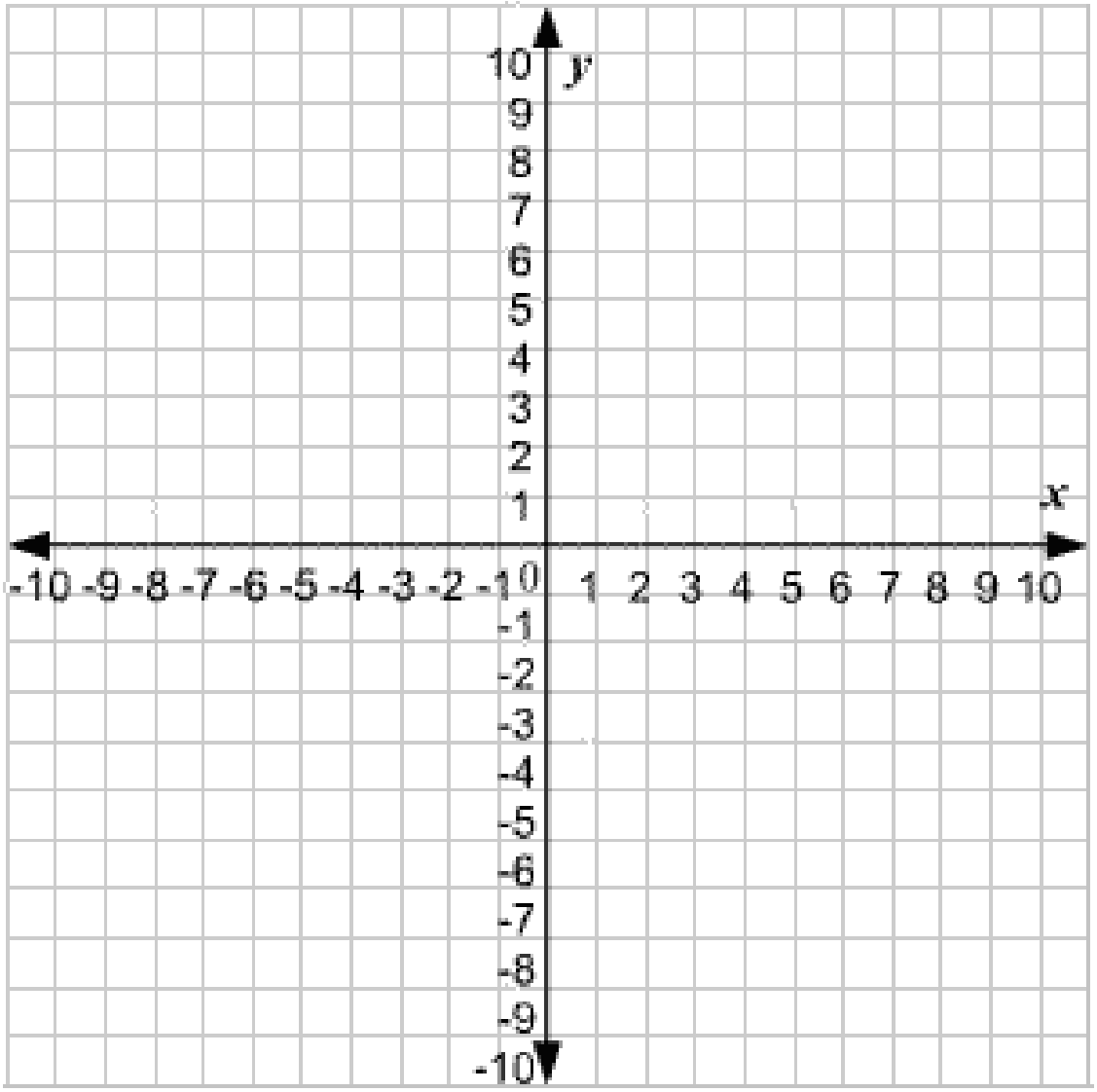
จากหน้าที่ 5 เขียนตัวอักษรภาษาอังกฤษแทนจุดสีแดงแต่ละจุด
แล้วระบุว่าจุดเหล่านั้นอยู่ในจตุภาคใดบ้าง

1.จตุภาคที่ 1 :
2.จตุภาคที่ 2 :
3.จตุภาคที่ 3 :
4.จตุภาคที่ 4 :

เขียนสิ่งที่ค้นพบจากการสังเกตรูปแบบคู่อันดับ
ในแต่ละจตุภาคในกล่องสี่เหลี่ยมนี้

นำจุดที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ เขียนบนกราฟ แล้วลากเส้นเชื่อมแต่ละจุด

$I(-9,0)$ $L(-3,7)$ $v(3,7)$ $E(9,0)$ $O(0,1)$ $u(0,-8)$



10.3 การเขียนกราฟจากสมการเชิงเส้น ผ่านคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการ

คู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นนั้นมีหลายคู่อันดับ
มันมีนิยามว่าเป็น คู่อันดับที่แสดงค่าของ x และ y
ที่เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นนั้นได้ ซึ่งคู่อันดับเหล่านั้น
จะมีมาก ไม่จำกัด เราจึงนิยมหาคู่อันดับเหล่านั้นพอประมาณ
ซึ่งจะหาได้โดย จัดรูปสมการนั้นให้อยู่ในรูปทั่วไปว่า $mx + c = y$
x คือตัวแปรในแนวแกน x และ y คือตัวแปรในแนวแกน y
m คือค่าคงตัวที่คูณกับ x และ c คือค่าคงตัวที่บวกกับ mx

ดังนั้น เราจึงจะสรุปได้ว่า x จะสัมพันธ์กับ y ในรูปของการคูณด้วย
ค่าคงตัวแล้วบวกค่าคงตัวค่าอื่น
เมื่อมันสัมพันธ์กันแล้ว เราจะแทน x ด้วยค่าใดๆก็ได้กี่ค่าก็ได้
ซึ่งจะนิยมแทนด้วย 1 2 3 เราจะได้ค่า y ออกมาแล้วนำค่ามาเขียน
เป็นคู่อันดับพร้อมวาดกราฟ

เราสามารถวาดกราฟได้ โดยการ จุดคู่อันดับอย่างน้อย
ไม่ต่ำกว่า 2 คู่อันดับบนกราฟก่อน จากนั้นลากเส้นยาวเท่าไร
ก็ได้ ให้ผ่านสองจุดนั้น จึงจะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์
ของสมการเชิงเส้นนั้นๆ

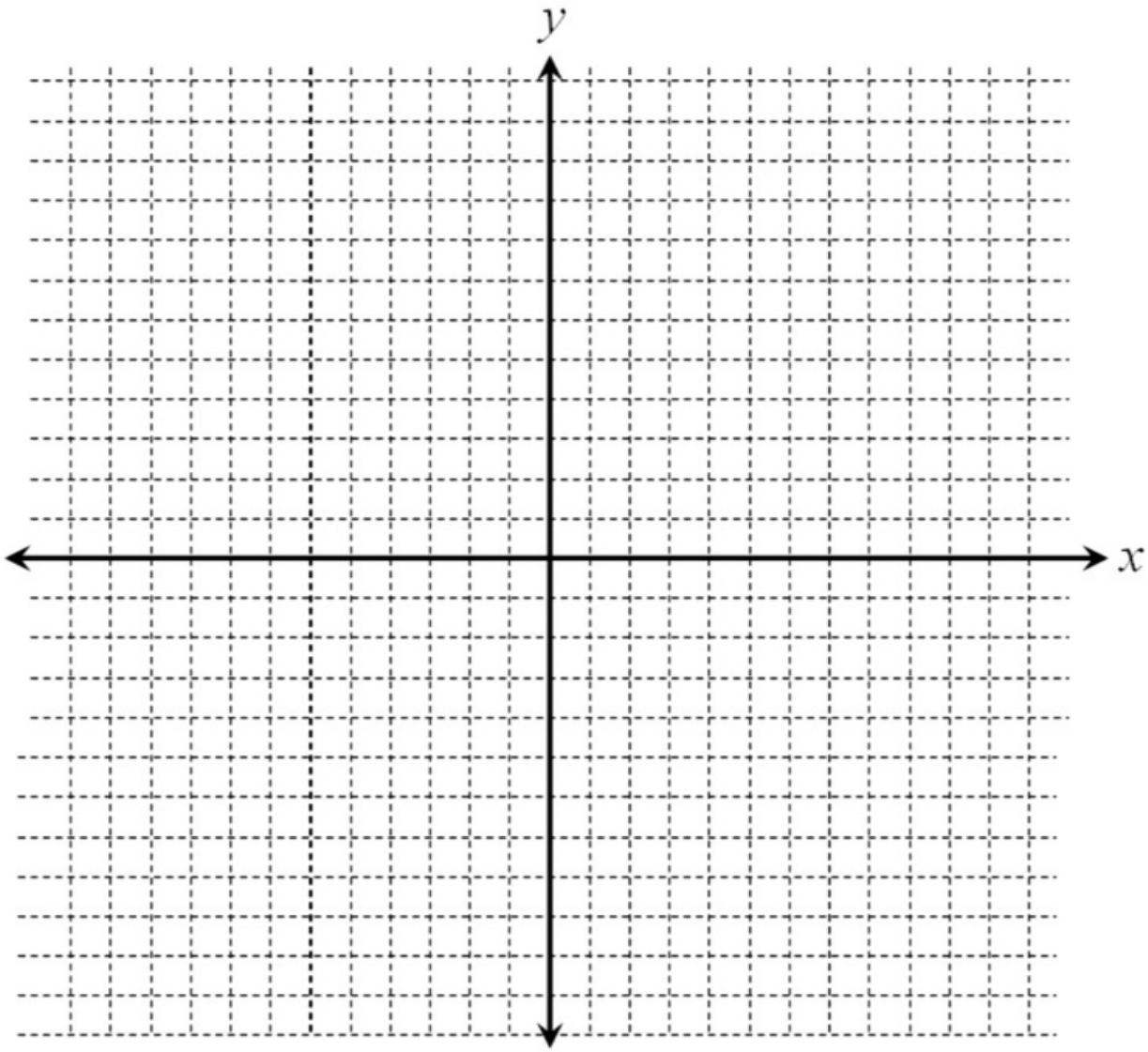
สมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้ จงเขียนคู่อันดับ แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อย่างน้อย 3 คู่

$$4x + 3 = y$$

$$2x + y = 5$$

$$6x + 2y + 7 = 3$$

จากสมการในหน้าที่ 9 นำมาวาดเป็นกราฟ



10.4 ระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

การเขียนกราฟเส้นตรง คือการที่จะต้องหาอย่างน้อยจุดสองจุด หรือสองคู่อันดับเพื่อนำมาวาดกราฟ อีก 2 จุดที่นิยมนำมาใช้ในการวาดกราฟ ก็คือ จุดที่กราฟตัดแกน x และ y หากเรามีสมการเชิงเส้นใดๆก็ตามเราสามารถหาจุดที่กราฟจะตัดแกน x และ y ได้

เนื่องจาก จุดทุกจุดบนแกน x มีพิกัดที่สองเป็น 0
ดังนั้น จุดที่กราฟตัดแกน x จะมีพิกัดในรูป $(a,0)$
เรียก a ว่าระยะตัดแกน x
ในทำนองเดียวกันทจุดทุกจุดบนแกน y มีพิกัดแรกเป็น 0
ดังนั้น จุดที่กราฟตัดแกน y จะมีพิกัดในรูป $(0,b)$
เรียก b ว่าระยะตัดแกน y

สรุปว่า ถ้าเราต้องการหาจุดที่กราฟตัดแกน x ให้แทน y ด้วย 0 ลงในสมการ แล้วค่า x ที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นระยะตัดแกน x และ ถ้าเราต้องการหาจุดที่กราฟตัดแกน y ให้แทน x ด้วย 0 ลงในสมการ แล้วค่า y ที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นระยะตัดแกน y

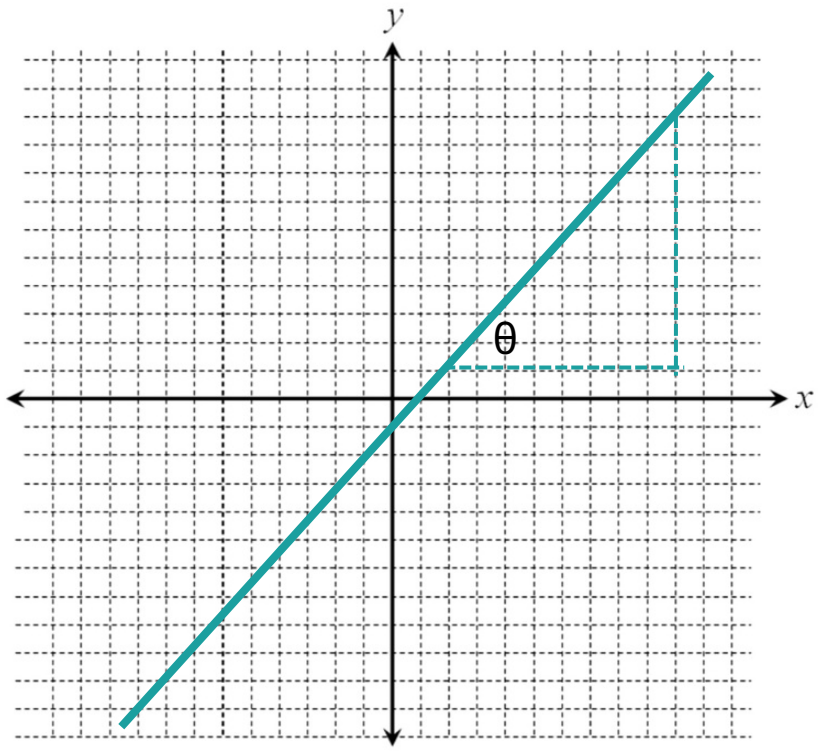
จากสมการเชิงเส้นเงื่อนไขต่อไปนี้ จงหาจุดที่กราฟตัดแกน x และ y

$3y - 6x = 12$

$7y + x - 3 = 4 - 6x$

$2y - 9 = 4x + 7$

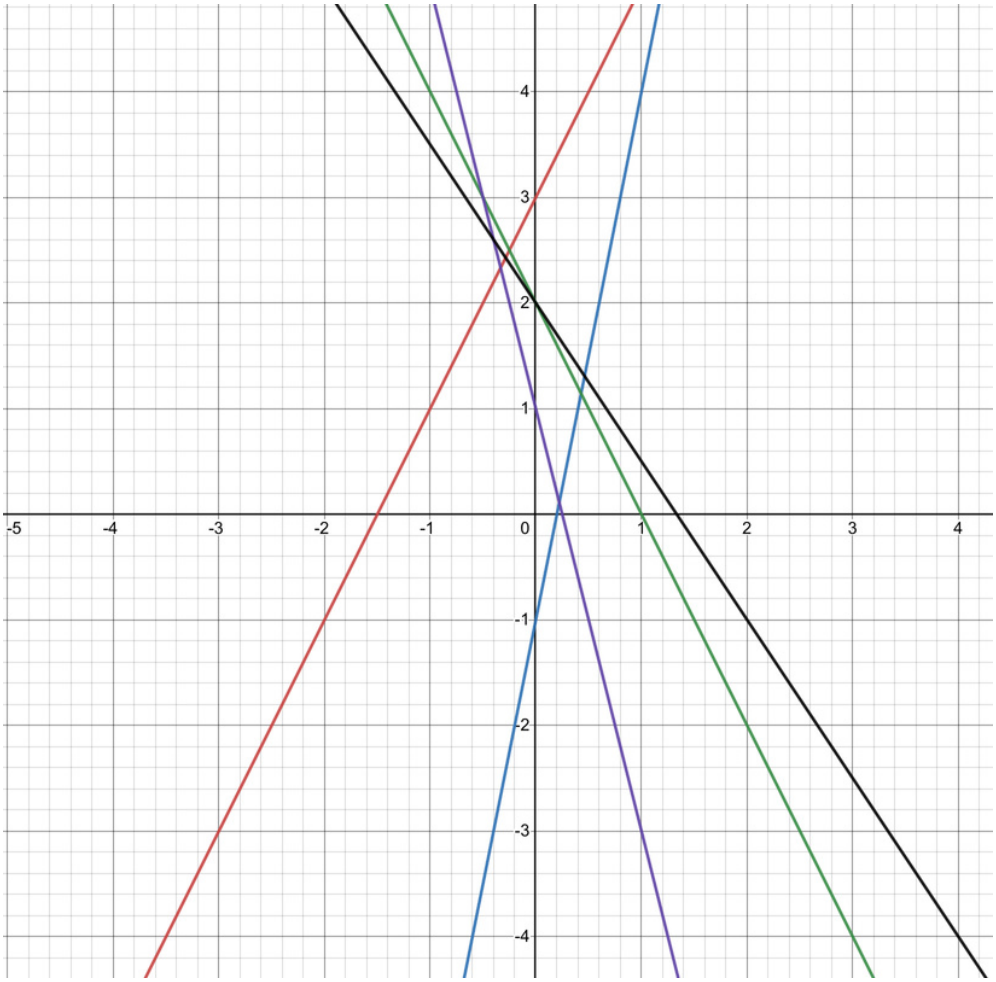
10.5 ความชันของกราฟ



ความชันของกราฟ (slope) $= \tan\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

สรุปคร่าวๆว่า การจะหาความชันของกราฟ จะหาได้จากการวาดสมการเป็นเป็นกราฟ และนำพิกัดใดๆมาสองจุด นำ y ตัวที่สองลบตัวที่หนึ่งหารด้วย x ตัวที่สองลบตัวที่หนึ่ง มีกฎอยู่ว่า ถ้ากราฟเส้นตรงเอียงทางขวาความชันจะเป็นบวก แต่หากเมื่อใดเส้นตรงเอียงทางซ้ายความชันย่อมเป็นลบ

จากกราฟดังต่อไปนี้จงหาความชันของกราฟ



กราฟแดง :

กราฟฟ้า :

กราฟม่วง:

กราฟเขียว :

กราฟดำ :

ข้อสังเกตสำคัญ!!

จากสมการที่กำหนดให้ จงเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของ y
หาจุดตัดแกน y และความชันของกราฟ

$3x - 3y + 3 = 6$

$2y + 6x = 8x - 2$

$4y - x - 2 = 1$

$4x - 2y + 5 = 3x + y - 3$

พบข้อสังเกตอะไรบ้าง ? ? ?
เขียนมาเลย ! !

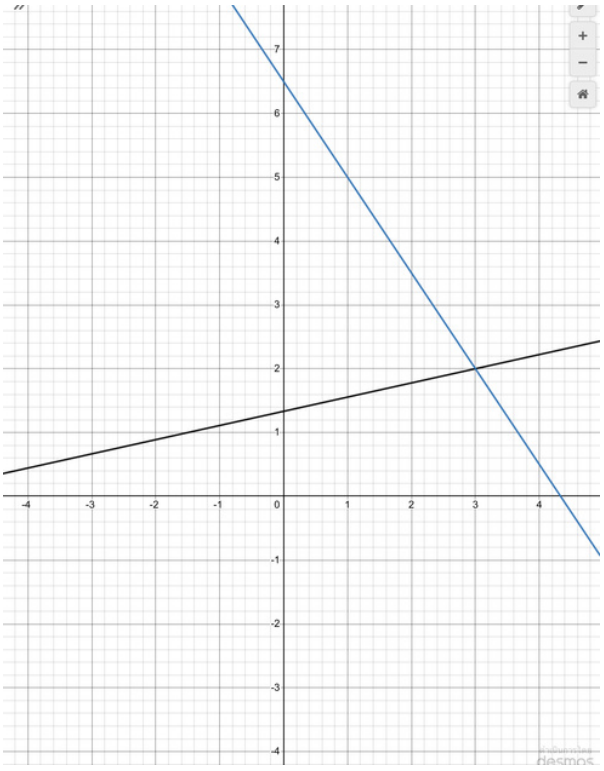
10.6 การแก้สมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้กราฟ

โดยทั่วไป ถ้าเรามีสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเพียงสมการเดียว เช่น 2x-y=6 เราสามารถหาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของสมการได้ แต่มีจำนวนมากนับไม่ถ้วน แต่ถ้าเรามีสองสมการที่กราฟไม่ขนานและไม่ซ้อนทับกัน ย่อมเกิดคู่อันดับที่ซ้ำกัน เพียงคู่เดียว และนั่นคือคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรคู่นั้น

กำหนดสมการ $2x + 12 = 9y$

$3x + 2y = 13$

นำมาวาดเป็นกราฟ จะได้กราฟดังรูป



จะเห็นได้ว่า กราฟของทั้งสองสมการนั้นตัดกันที่จุด (3,2)
ซึ่งจุดนี้จะเป็นจุดที่เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรคู่นี้ นั่นคือคู่อันดับ (3,2)
หรือ x=3,y=2

ใช้ความรู้เรื่องของกราฟ แก้สมการสองตัวแปรดังต่อไปนี้

$$2x - 3y + 1 = -1$$
$$3x + y - 10 = 9$$

$$7x - 3y - 8 = -9$$
$$6x - 9y + 1 = 13$$

$$4x + 2y - 9 = 3$$
$$6x - 5y - 55 = 11$$

$$-7x + 2y - 9 = 11$$
$$-9x - 4y + 1 = 7$$

สร้างสมการเชิงในรูปแบบใดก็ได้ จากกราฟที่กำหนด

